Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

21 de Diciembre de 2018. Fernando Mayoral `mayoral@us.es`

Temas variados. Nivel básico.

Ejercicios tomados de diveras pruebas de selección (olimpiadas matemáticas o similares).

Ejercicio 1. Determina el mayor número natural n para el que n^3+100 es divisible por $n+10$.

. . . .

Ejercicio 2. Enuncia y demuestra la fórmula sugerida por las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ccc} 1 & = & 0+1 \\ 2+3+4 & = & 1+8 \\ 5+6+7+8 & = & 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 & = & 27+64 \\ \cdots & = & \cdots \end{array}$$

. . . .

Ejercicio 3. Sean x, y, z números reales distintos de cero que verfican que

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$$

Demuestra que $x=y=z$ ó $|xyz|=1$.

. . . .

Ejercicio 4. ¿Hay alguna forma de elegir tres números reales, a, b, c, distintos de cero tales que para cualquier reordenación A, B, C, de dichos números, la ecuación

$$Ax^2+Bx+C=0$$

tenga alguna solución racional?

. . . .

Ejercicio 5. Considera un rectángulo que se puede dividir en 200 cuadrados iguales y también se puede dividir en 288 cuadrados iguales. Demuestra que dicho rectángulo se puede dividir en 392 cuadrados iguales.

¿Cómo obtendrías otros números n para los que el rectángulo se puede dividir en n cuadrados iguales?

. . . .

Ejercicio 6. Sean x, y, z tres números reales tales que $xyz=1$. Demuestra que como mucho dos de los siguientes números

$$2x-\frac{1}{y},\ 2y-\frac{1}{z},\ 2z-\frac{1}{x}$$

es mayor que 1.

. . . .

Ejercicio 7. Determina todos los pares (a, b) de números enteros que verifican la ecuación

$$a^3+b^3=(a+b)^2.$$
